

Računska geometrija in topologija

(doktorski študij, FMF, FRI)

Opis predmeta: Računska geometrija in topologija je ime za novo raziskovalno področje, nastalo na preseku matematike in računalništva, ki je v zadnjih letih doživelo izredno močan razvoj. Osnovna vprašanja področja izvirajo iz problemov pri analizi velikih količin podatkov (slike, scani, biološki podatki) in problemov, ki se pojavljajo pri upravljanju kompleksnih naprav, npr. robotov. Pri razvijanju orodij za kvalitativno analizo in razumevanje tovrstnih problemov se povezujejo in prepletajo metode in tehnike iz geometrije, algebrajske topologije in računalništva, ki imajo zelo široko področje uporabe.

Ciljna publika: doktorski in napredni magistrski študenti matematike ali računalništva

Obseg predmeta: en semester, 30 kontaktnih ur

Vsebina predmeta:

1. Osnove: topološki prostori, kompleksi in mnogoterosti; učinkovita predstavitev in osnovne operacije.
2. Diskretna Morseova teorija.
3. Homologija in vztrajna homologija. Izreki o vztrajnosti.
4. Osnovni pojmi topološke robotike, topološka kompleksnost načrtov gibanja. Kinematične preslikave, topološka kompleksnost manipulacije robotskih naprav.

Osnovna literatura: H. Edelsbrunner, J.L. Harer, *Computational Topology - An Introduction* (AMS Press, 2010). M. Farber, *Invitation to Topological Robotics*, (EMS Publishing House, Zurich, 2008). R. Ghrist, *Elementary Applied Topology*, ed. 1.0, Createspace, 2014.

Podrobnejša vsebina: (vsak razdelek zahteva približno 6 ur predavanj)

1. Topologija evklidskega prostora. Metrika, odprte in zaprte krogle, notranje in mejne točke. Povezanost in povezanost s potmi. Krivulje in ploskve, Jordanov izrek. Mnogoterosti (kot podprostori in intrinzično).
2. Kompleksi. Simplicialni kompleksi (v evklidskem prostoru in kombinatorično), celični kompleksi, osnovne operacije, Eulerjeva karakteristika. Celularizacija oblaka točk - konstrukcije Čecha, Ripsa, Delauneya, Voronoia. Učinkovita predstavitev podatkov in algoritmi.
3. Diskretna Morseova funkcija, kritični pari simpleksov, diskretna vektorska polja.
4. Homologija (nad obsegom). Definicija, osnovno računanje in primeri. Inducirani homomorfizmi in homotopska invariantnost. Relativna in reducirana homologija, eksaktno zaporedje para, izrez. Algoritmi za računanje homologije. Vztrajna homologija.
5. Robustni načrti gibanja robota, konfiguracijski prostori, topološka kompleksnost, ocene in tehnike računanja. Kinematične preslikave, singularnosti (gimbal lock), posredna manipulacija robotskih naprav, manipulacijska kompleksnost.

Computational geometry and topology

(PhD programme, UL FMP, UL FCIS)

Course Description: Computational geometry and topology is a new and rapidly developing field at the crossroads of mathematics and computer science. It studies problems that arise in the analysis of large data sets (digital images, scans, biological data) and in the manipulation of complex devices, e.g. robots. Mathematical tools for the qualitative analysis and understanding of these problems require a combination of methods from geometry, algebraic topology and computer science.

Target Audience: doctoral and advanced master students in mathematics and computer science.

Contact hours: 30 (2 hours in class per week)

Course outline:

1. Basics of topology, simplicial complexes and manifolds, efficient description of geometric objects.
2. Discrete Morse theory.
3. Homology and persistent homology. Persistence theorems.
4. Introduction to topological robotics, topological complexity of motion planning. Kinematic maps, manipulation complexity of robot devices.

Textbooks: H. Edelsbrunner, J.L. Harer, *Computational Topology - An Introduction* (AMS Press, 2010). M. Farber, *Invitation to Topological Robotics*, (EMS Publishing House, Zurich, 2008). R. Ghrist, *Elementary Applied Topology*, ed. 1.0, Createspace, 2014.

Detailed course description: (each section requires appr. 6 contact hours)

1. Topology of euclidian spaces, metrics. Connectedness, paths, curves and surfaces, Jordan theorem. Manifolds.
2. Simplicial and cell complexes, basic constructions, Euler characteristic. Cell structures on point clouds - Čech, Ripsa, Delauney and Voronoi decompositions. Efficient representation and algorithms.
3. Discrete Morse function, critical pairs, discrete vector fields.
4. Homology (with field coefficients), basic computations and examples. Induced homomorphisms and homotopy invariance. Relative and reduced homology, exact sequences and excision. Computation algorithms, persistent homology.
5. Robust motion plans for robot devices, configuration spaces, topological complexity, estimates and explicit computation. Kinematic maps, gimbal lock, manipulation complexity of robot devices.